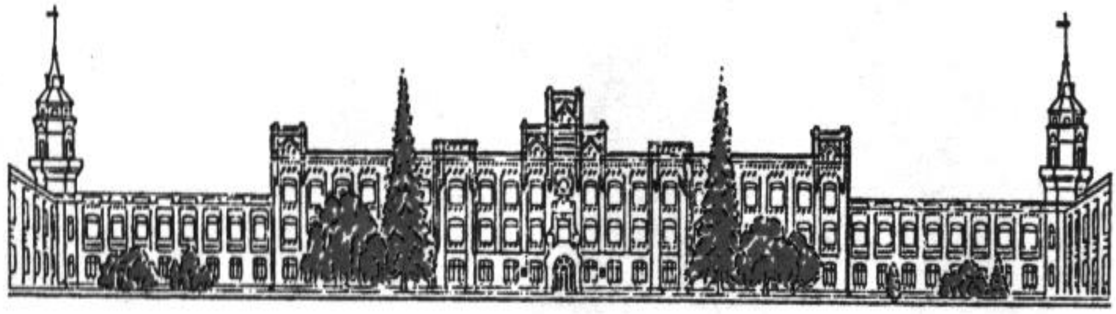
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»



Массалітіна Є.В., Гончаренко В.О., Поварова О.А.

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Частина І

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни

«Вища математика» для студентів теплоенергетичного

факультету денної та заочної форм навчання

Київ

НТУУ «КПІ»

2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Частина I

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни
«Вища математика» для студентів теплоенергетичного
факультету денної та заочної форм навчання

*Рекомендовано Науково-методичною радою з математики
фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»*

Київ
НТУУ «КПІ»
2015

Кратні інтеграли. Частина I. Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / Уклад.: Є.В. Массалітіна, В.О. Гончаренко, О.А. Поварова. К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 44 с.

Гриф надано Науково-методичною радою
з математики фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»
Протокол №6 від 26.05.2014 р.

Навчальне видання

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Частина I

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання

Укладачі: *Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук,*
Гончаренко Віра Олександрівна,
Поварова Олена Андріївна, канд. фіз.-мат. наук.

Відповідальний редактор: *Дудкін М.Є., д-р фіз.-мат. наук, доц.*

Рецензент: *Диховичний О.О., канд. фіз.-мат. наук, доц.*

За редакцією укладачів
Надруковано з оригінал-макета замовника

ВСТУП

Методичні вказівки «Кратні інтеграли» укладені для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання з метою забезпечення якісного засвоєння ними даного матеріалу та успішного виконання і оформлення типового розрахунку «Кратні інтеграли», передбаченого навчальною програмою дисципліни «Вища математика».

Методичні вказівки «Кратні інтеграли» складаються з двох частин.

В першій частині методичних вказівок «Подвійний інтеграл та його застосування» стисло викладено основний теоретичний матеріал та наведено широкий спектр розв'язаних навчальних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання та сприяють розвиткові практичних навичок.

Друга частина методичних вказівок «Потрійний інтеграл та його застосування» побудована аналогічно до першої. В ній також стисло викладено основний теоретичний матеріал та наведена методика розв'язування типових задач.

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

§1. Задачі, які приводять до поняття подвійного інтеграла

Розглянемо дві задачі:

Задача 1 (про об’єм циліндричного тіла).

Циліндричним тілом (рис. 1) називають поверхню, яка обмежена:

зверху – поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$,

знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy,

з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz.

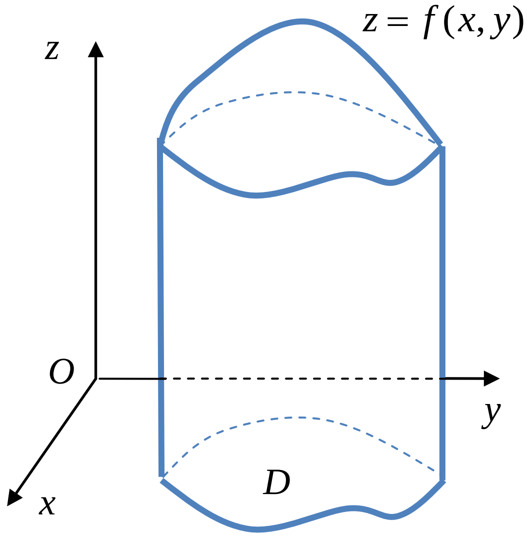


Рис. 1

Обчислимо об’єм V циліндричного тіла.

1. Розіб’ємо довільним способом область D на n частин D_i: $D = \bigcup D_i$, $i = \overline{1,n}$, $D_i \bigcap D_j = \varnothing$, $i \neq j$, які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо ΔS_i – площу області D_i.

2. У кожній області D_i виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i) \in D_i$ та обчислимо добуток $f(x_i, y_i)\Delta S_i = f(M_i)\Delta S_i = V_i$ – об’єм циліндричного стовпчика з твірними паралельними осі Oz, основою D_i та висотою $f(M_i)$.

3. Тоді сума $\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла. Це наближення тим точніше, чим більше число n і чим менші розміри областей D_i.

- **Діаметром** $d(D_i)$ замкненої обмеженої області D_i називається найбільша відстань між двома точками області.

4. Позначимо $\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(D_i)$ найбільший з діаметрів областей D_i. Тоді об'єм циліндричного тіла

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \,. \qquad (1)$$

Отже, задача про обчислення об'єму циліндричного тіла зведена до знаходження границі вигляду (1).

Задача 2 (про масу пластини).

Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластину, формою якої є замкнена область D. В області D задана неперервна функція $\gamma(x, y)$, яка визначає густину в кожній точці цієї пластини.

Знайдемо масу m пластини.

Відмітимо, що масу однорідної матеріальної пластини з густиною $\gamma(x, y) = \gamma_0 - const$ обчислюють за формулою $m = \gamma_0 S$, де S – площа області D.

1. Розіб'ємо область D на n частин D_i, $D = \bigcup D_i$, $i = \overline{1, n}$, $D_i \bigcap D_j = \varnothing$, $i \ne j$, площі яких дорівнюють ΔS_i.

2. У кожній області D_i виберемо точку $M_i(x_i, y_i) \in D_i$ і припустимо, що густина в усіх точках області D_i стала та дорівнює $\gamma(x_i, y_i)$.

Тоді добуток $\gamma(x_i, y_i)\Delta S_i = \gamma(M_i)\Delta S_i = m_i$ – визначає масу частини пластини, яка займає область D_i.

3. Сума $\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i)\Delta S_i$ наближено дорівнює масі пластини. Це наближення тим точніше, чим менші розміри областей D_i.

4. Точне значення маси дістанемо як границю суми при $\lambda \to 0$. Тоді маса неоднорідної матеріальної пластини

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i) \Delta S_i \,. \qquad (2)$$

Отже, задача про знаходження маси пластини зведена до знаходження границі вигляду (2).

§2. Поняття подвійного інтеграла. Умови його існування

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R^2$.

1. Розіб'ємо довільним способом область D на n частин D_i, $D = \bigcup D_i$, $i = \overline{1, n}$, $D_i \bigcap D_j = \varnothing$, $i \neq j$, які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо ΔS_i – площу області D_i.
2. У кожній області D_i виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i) \in D_i$ та обчислимо добуток $f(x_i, y_i)\Delta S_i = f(M_i)\Delta S_i = I_i$.

- Сума $$\sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \qquad (3)$$

називається **інтегральною сумою** функції $z = f(x, y)$ по області D.

3. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i.

- Якщо при $\lambda \to 0$ існує скінченна границя інтегральної суми (3), яка не залежить від способу розбиття області D на частини D_i, вибору в них точок M_i, то ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $z = f(x, y)$ по області D і позначається

$$\iint_D f(x, y)\, dS \text{ або } \iint_D f(x, y)\, dxdy \,.$$

Отже, за означенням $\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

При цьому функція $f(x,y)$ називається **інтегровною** в області D, D – областю інтегрування, dS – елементом площі.

Зауваження. З означення подвійного інтеграла випливає, що він не залежить від способу розбиття області D на частини. Тому ми можемо розбивати область D прямими, які паралельні координатним осям. При цьому $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \cdot \Delta y_i = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Геометричний зміст подвійного інтеграла

$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ – об'єм циліндричного тіла.

Фізичний зміст подвійного інтеграла

$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,dxdy$ – маса неоднорідної матеріальної пластини, густина якої в кожної точці (x,y) визначається функцією $\gamma(x,y)$.

Теорема (достатня умова інтегровності функції).

Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона інтегровна в цій області.

§3. Властивості подвійного інтеграла

аналогічні властивостям визначеного інтеграла.

Властивість 1. Сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла $\iint\limits_D Cf(x,y)\,dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy, \quad C - const$.

Наслідок. Якщо $z = f(x,y) = 1,\ \forall (x,y)\in D$, то $\iint\limits_D C\,dxdy = CS_D$,

де S_D – площа області D.

Властивість 2 (лінійність). Якщо функції $z = f(x,y)$ та $z = g(x,y)$ інтегровні в області D, то

$$\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))\, dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)\, dxdy$$

подвійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від цих функцій.

Зауваження. Властивість має місце для суми довільного скінченного числа функцій.

Властивість 3 (адитивність).

Якщо функція $z = f(x,y)$ інтегровна в області D, яку можна розбити на області D_1 і D_2, що не мають спільних внутрішніх точок $D = D_1 \bigcup D_2$, $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy\,.$$

Зауваження. Ця властивість справедлива для довільного скінченного числа областей, які складають область D і не мають спільних внутрішніх точок.

Властивість 4 (про інтегрування нерівностей).

Якщо функції $z = f(x,y)$ і $z = g(x,y)$ інтегровні в області D та $f(x,y) \le g(x,y)$ $\forall\,(x,y) \in D$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)\, dxdy\,.$$

Наслідок. Якщо функція $z = f(x,y) \ge 0$, то $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \ge 0$.

Властивість 5 (оцінка подвійного інтеграла).

Якщо функція $z = f(x,y)$ інтегровна в області D, яка має площу S_D, то

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \le MS_D\,,$$

де m і M – відповідно найменше та найбільше значення функції в області D.

Властивість 6 (про середнє значення функції).

Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S_D, то існує така точка $(x^*, y^*) \in D$, що

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x^*, y^*) \cdot S_D .$$

Властивість 7 (про оцінку інтеграла по модулю).

Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то функція $|f(x,y)|$ інтегровна в цій області і

$$\left| \iint_D f(x,y)\,dxdy \right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy .$$

§4. Обчислення подвійного інтеграла в ПДСК

Обчислення подвійного інтеграла, як границі інтегральної суми пов'язане із значними труднощами. Щоб їх уникнути, **обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення повторного інтеграла (двох звичайних визначених інтегралів).**

Нехай $z = f(x,y) \ge 0$ неперервна функція в замкненій обмеженій області D.

Виведемо формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного 2 способами:

- в напрямі осі Oy;
- в напрямі осі Ox.

1. В напрямі осі Oy**.** Зробимо деякі припущення відносно області D. Нехай область D обмежена двома прямими $x = a,\;\; x = b\;\; (a < b)$ і двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$, причому $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)\quad\forall\, x\in[a,b]$ (рис. 2).

- Область $D=\{(x,y):\ \ a\le x\le b,\ \ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ називається **правильною в напрямі осі** Oy, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy, перетинає межу області не більше, ніж в двох точках $y_{вх}$, $y_{вих}$.

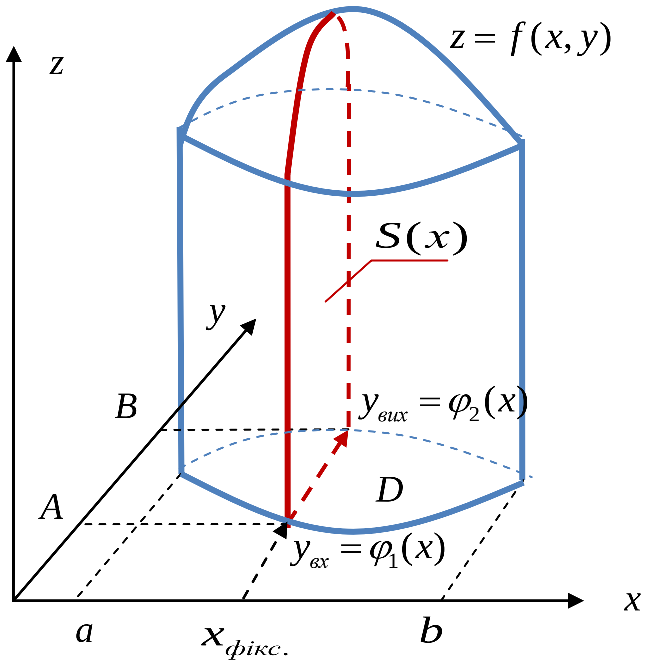


Рис. 2

Подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=V$$

виражає об'єм циліндричного тіла з основою D, обмеженого зверху поверхнею $z=f(x,y)$. З іншої сторони, за методом паралельних перерізів об'єм циліндричного тіла

$$V=\int_a^b S(x)dx,$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox. Знайдемо площу криволінійної трапеції

$$S(x)=\int_A^B \underset{x-фіксов.}{f(x,y)}dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Тоді об'єм циліндричного тіла

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Отже, **формула переходу від подвійного інтеграла до повторного в напрямі осі** Oy має вигляд

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{a}^{b}\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (4)$$

Праву частину формули (4) називають **повторним інтегралом** від функції $z=f(x,y)$ по області D.

2. В напрямі осі Ox**.** Нехай область D обмежена двома прямими $y=c,\ \ y=d\ \ (c<d)$ і двома неперервними кривими $x=\psi_1(y)$ та $x=\psi_2(y)$, причому $\psi_1(y)\le\psi_2(y)\quad \forall\, y\in[c,d]$.

- Область $D=\{(x,y):\ \ c\le y\le d,\ \ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ називається **правильною в напрямі осі** Ox, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Ox перетинає межу області не більше, ніж в двох точках $x_{вх}$, $x_{вих}$.

Формула переходу від подвійного інтеграла до повторного в напрямі осі Ox має вигляд

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{c}^{d}\left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_{c}^{d}dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (5)$$

Інтеграли (4) та (5) називаються інтегралами з різним порядком інтегрування.

- Область D називається **правильною,** якщо вона правильна в напрямі осі Ox та осі Oy.

Зауваження. Якщо область D правильна в обох напрямках, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (4) так і за формулою (5). Результати будуть однаковими.

Зауваження. Якщо область D не є правильною ні в напрямі осі Ox, ні в напрямі осі Oy, то її треба розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі осі Ox або Oy.

§5. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай $z = f(x,y)$ неперервна функція в замкненій і обмеженій області D. Тоді існує подвійний інтеграл $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Поставимо задачу: перейти в інтегралі I від змінних x, y до нових змінних u, v за допомогою **формул перетворення координат**:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases} \tag{6}$$

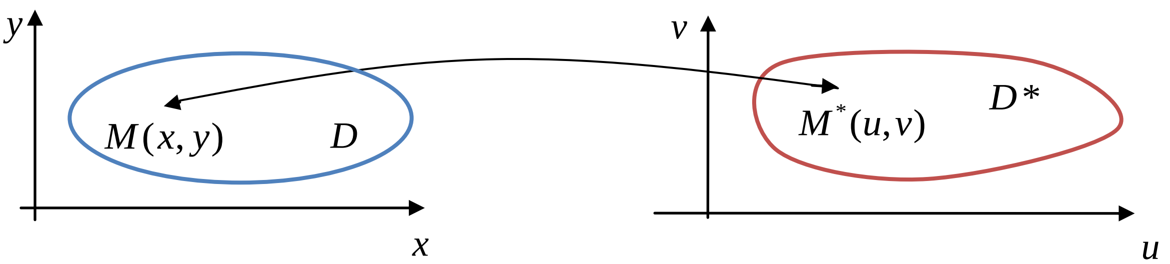


Рис. 3

Будемо вважати, що з формул (6) можна однозначно виразити

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases} \tag{7}$$

Тобто кожній точці $M(x,y) \in D$ ставиться у відповідність точка $M^*(u,v) \in D^*$ на координатній площині з прямокутними координатами u, v (рис. 3).

Формули (7) називаються **формулами оберненого перетворення.**

Теорема (про заміну змінних в подвійному інтегралі).

Нехай виконуються такі умови:

1. *Перетворення (6) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним;*
2. *Функції (6) мають в області D неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник*

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0; \quad (8)$$

3. *Функція $z=f(x,y)$ неперервна в області D.*

Тоді справедлива така ***формула заміни змінних:***

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv. \quad (9)$$

• Функціональний визначник (8) називається **визначником Якобі**[1] або **якобіаном.**

Отже, щоб виконати заміну змінних в подвійному інтегралі, потрібно:

1. Стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^*.
2. В підінтегральній функції $f(x,y)$ від змінних x,y перейти до змінних u,v.
3. Елемент площі $dxdy$ в координатах x,y замінити елементом площі $|J(u,v)|\,dudv$ в координатах u,v.

§6. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат (ПСК)

• **Полярними координатами точки** $M(x,y)$ називається упорядкована пара чисел ρ,φ, де

$\rho=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$ – полярний радіус, $0\le\rho<+\infty$,

$\varphi=\angle(Op,\overrightarrow{OM})$ – полярний кут, $0\le\varphi<2\pi$.

Якщо точка M має декартові координати x,y і полярні ρ,φ (рис. 4), то формули, які пов'язують ПДСК та ПСК мають вигляд

[1] Карл Густав Якоб Якобі (1804–1851) – німецький математик, який зробив значний внесок до комплексного аналізу, лінійної алгебри, динаміки і інших розділів математики і механіки.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & 0 \le \rho < +\infty, \\ y = \rho\sin\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi, \end{cases} \tag{10}$$

де $x^2 + y^2 = \rho^2, \quad tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

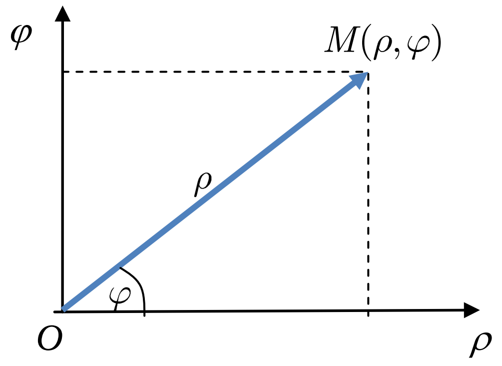


Рис. 4

Числа ρ, φ вважатимемо прямокутними координатами точки площини $O\rho\varphi$. Тоді формули (10) задають відображення площини $O\rho\varphi$ в площину Oxy.

Формулу для обчислення подвійного інтеграла в ПСК можна отримати за допомогою теореми про заміну змінних в подвійному інтегралі. Знайдемо визначник Якобі

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho, \quad |J(\rho,\varphi)| = \rho.$$

Тоді **формула заміни змінних у подвійному інтегралі** набуває вигляду

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho d\varphi, \tag{11}$$

де D^* – область, яка відповідає області D в полярній системі координат.

Зауваження. Формулу (11) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння межі області D містить суму $x^2 + y^2$, оскільки ця сума в ПСК має простий вигляд: $x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho^2$.

Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат зводять до обчислення повторного інтеграла.

Розглянемо такі чотири випадки:

1. Область D_1^* (рис. 5) обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α і β $(\alpha < \beta)$ та кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$.

- Область $D_1^* = \{(\rho, \varphi): \ \alpha \le \varphi \le \beta, \ \ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\}$ називається **правильною,** якщо довільний промінь, який проходить через внутрішню точку області D_1^* перетинає межу області не більше, ніж в двох точках $\rho_{вх}$, $\rho_{вих}$.

Тоді у подвійному інтегралі (11) права частина формули набуває вигляду

$$\iint\limits_{D_1^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,.$$

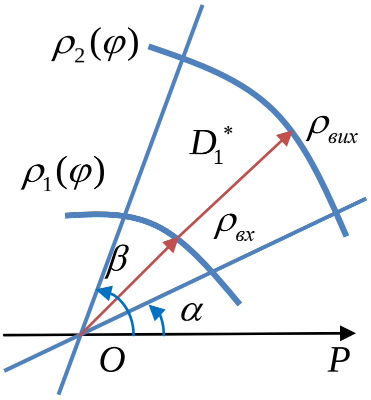


Рис. 5

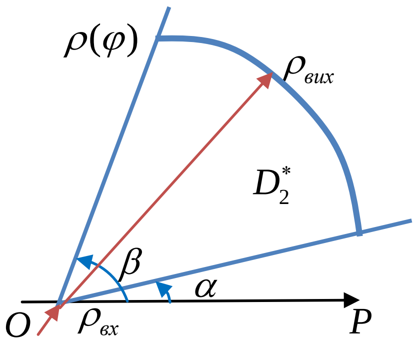


Рис. 6

2. Область D_2^* (рис. 6) обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α і β $(\alpha < \beta)$ та кривою $\rho = \rho(\varphi)$, тоді

$$D_2^* = \{(\rho, \varphi): \ \ \alpha \le \varphi \le \beta, \ \ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)\},$$

$$\iint\limits_{D_2^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

3. Область D_3^* (рис. 7) охоплює початок координат та обмежена кривою $\rho = \rho(\varphi)$, тоді

$$D_3^* = \{(\rho, \varphi): \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ \ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)\},$$

$$\iint\limits_{D_3^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,.$$

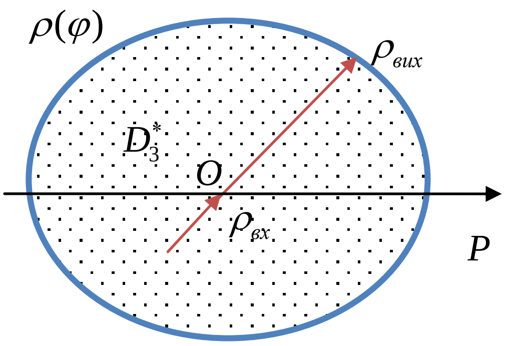


Рис 7.

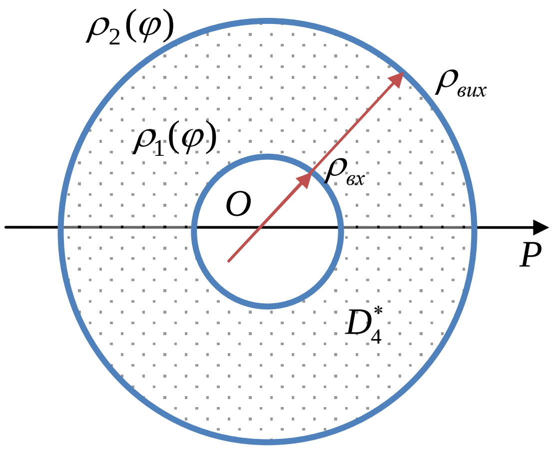


Рис. 8

4. Область D_4^* (рис. 8) обмежена кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$, тоді

$$D_4^* = \{(\rho,\varphi):\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\},$$

$$\iint\limits_{D_4^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,.$$

§7. Обчислення подвійного інтеграла в узагальненій полярній системі координат (УПСК)

Формули заміни декартових координат узагальненими полярними мають вигляд

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, & a,b - const, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ y = b\rho\sin\varphi, & a > 0, \quad b > 0, \quad 0 \le \rho < +\infty. \end{cases}$$

Оскільки визначник Якобі

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -\rho a\sin\varphi\\ b\sin\varphi & \rho b\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho ab(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho ab,$$

$$|J(\rho,\varphi)|=ab\rho,$$

формула заміни змінних (9) набуває такого вигляду

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=ab\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho d\varphi. \qquad (12)$$

Зауваження. УПСК доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння межі області D містить суму $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, оскільки ця сума в УПСК має простий вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=\rho^2.$$

§8. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії

1. **Об'єм циліндричного тіла.** З геометричного змісту подвійного інтеграла об'єм циліндричного тіла обмеженого зверху поверхнею $z=f(x,y)\ge 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D, на площині Oxy, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz, обчислюється за формулою

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy. \qquad (13)$$

2. **Площа плоскої фігури.** Якщо покласти в формулі (13) $z=f(x,y)=1$, то отримаємо циліндричне тіло з висотою $H=1$. Об'єм такого тіла дорівнює площі S_D основи D. Отже, отримаємо формулу для обчислення площі S_D області D

$$S_D = \iint\limits_D dxdy \overset{\text{ПСК}}{=} \iint\limits_{D^*} \rho d\rho d\varphi .$$

3. Площа поверхні. Якщо поверхня σ, яка задана рівнянням $z = f(x,y)$, проектується на площину Oxy в область D, функції $f(x,y),\quad f'_x(x,y),\quad f'_y(x,y)$ – неперервні в області D, то площа поверхні σ обчислюється за формулою

$$P_\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\,dxdy . \tag{14}$$

§9. Застосування подвійного інтеграла до задач механіки

1. Маса m пластини. Нехай на площині Oxy маємо плоску неоднорідну матеріальну пластину, яка має форму замкненої обмеженої області D. В кожній точці області D густина пластини визначається неперервною функцією $\gamma(x,y)$.

Тоді масу неоднорідної матеріальної пластини обчислюють за формулою

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)\, dxdy .$$

2. Статичні моменти матеріальної пластини. Нехай матеріальна пластина в площині Oxy має форму області D. В області D задана неперервна функція $\gamma(x,y)$, яка визначає густину в кожній точці цієї пластини.

Поставимо задачу знайти статичні моменти пластини.

1) Розіб'ємо область D на n частин D_i, $D = \bigcup D_i$, $i = \overline{1,n}$, $D_i \bigcap D_j = \varnothing,\quad i \neq j$, площі яких дорівнюють ΔS_i.

2) У кожній області D_i виберемо точку $M_i(x_i, y_i) \in D_i$ і припустимо, що густина в усіх точках області D_i стала та дорівнює $\gamma(x_i, y_i)$.

3) Тоді добуток $\gamma(x_i, y_i)\Delta S_i = \gamma(M_i)\Delta S_i = m_i$ – визначає масу частини пластини, яка займає область D_i. Якщо вважати, що кожну з цих мас зосереджено в точці $M_i(x_i, y_i) \in D_i$, то дістанемо дискретну сукупність матеріальних точок, для якої статичні моменти відносно координатних осей визначаються за формулами

$$M_{Ox}^n = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot m_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \gamma(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

$$M_{Oy}^n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \gamma(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

4) Точне значення цих величин дістанемо, коли перейдемо до границі при $\lambda \to 0$. Тоді статичні моменти матеріальної пластини відносно координатних осей обчислюють за формулами

$$M_{Ox} = \lim_{\lambda \to 0} M_{Ox}^n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \gamma(x_i, y_i)\, \Delta S_i = \iint_D y \cdot \gamma(x, y)\, dxdy,$$

$$M_{Oy} = \lim_{\lambda \to 0} M_{Oy}^n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \gamma(x_i, y_i)\, \Delta S_i = \iint_D x \cdot \gamma(x, y)\, dxdy.$$

Знаючи масу та статичні моменти, неважко знайти координати центра маси пластини D, бо $\overline{x} \cdot m = M_{Oy}$, $\overline{y} \cdot m = M_{Ox}$.

3. Координати центра маси матеріальної пластини будемо обчислювати за формулами

$$\overline{x} = \frac{M_{Oy}}{m} = \frac{\iint_D x \cdot \gamma(x, y)\, dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)\, dxdy},$$

$$\overline{y} = \frac{M_{Ox}}{m} = \frac{\iint_D y \cdot \gamma(x, y)\, dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)\, dxdy}.$$

4. Моменти інерції матеріальної пластини відносно координатних осей

$$I_{Ox} = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x, y)\, dxdy, \qquad I_{Oy} = \iint_D x^2 \cdot \gamma(x, y)\, dxdy.$$

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

§1. Обчислення подвійного інтеграла в ПДСК. Зміна меж інтегрування

Приклад 1. Розставити межі інтегрування в інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ двома способами, якщо область інтегрування D обмежена лініями $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=x^2$, $y=0$. Область інтегрування D зобразити на рисунку.

Розв'язок. Визначимо вигляд кривої, яка обмежує область D:

$$y=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y^2=2x-x^2 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1 \Rightarrow$$

$(x-1)^2+y^2=1$ — коло з центром в точці $O_1(1,0)$ і радіусом $R=1$. $y=\sqrt{2x-x^2}$ — верхня частина кола.

Знайдемо точки перетину кола та параболи $y=x^2$:

$$\begin{cases} y=\sqrt{2x-x^2}, \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4+x^2-2x=0, \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-1)(x^2+x+2)=0, \\ y=x^2. \end{cases}$$

Отже, криві перетинаються в двох точках $O(0,0)$, $A(1,1)$. Зобразимо область D (рис. 1, 2).

Область D правильна у напрямі осі Ox. В напрямі осі Oy її треба розбити на дві правильні області D_1 і D_2, оскільки верхня межа області D задана двома різними рівняннями. Отже, інтегрування можна проводити як у напрямі осі Ox, так і у напрямі осі Oy.

1-й спосіб. Проведемо інтегрування в напрямі осі Ox (рис. 1). Область D в цьому напрямі обмежена лініями

$$\ell_1:\ x_{вх}=\sqrt{y}, \qquad \ell_2:\ x_{вих}=\sqrt{1-y^2}+1, \qquad \ell_3:\ y=0,$$

отже,

$$D=\{(x,y):\quad 0\le y\le 1,\quad \sqrt{y}\le x\le \sqrt{1-y^2}+1\}.$$

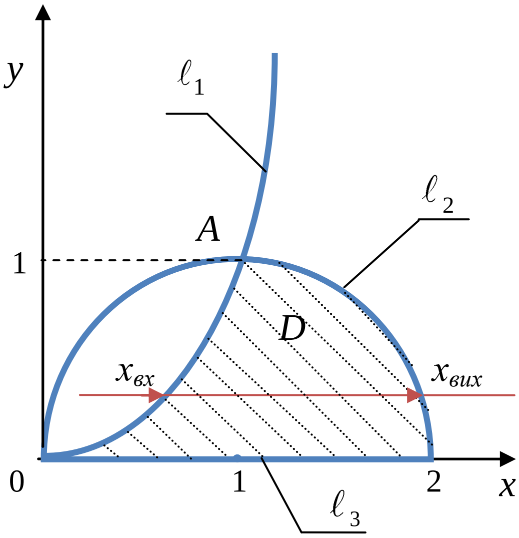


Рис. 1

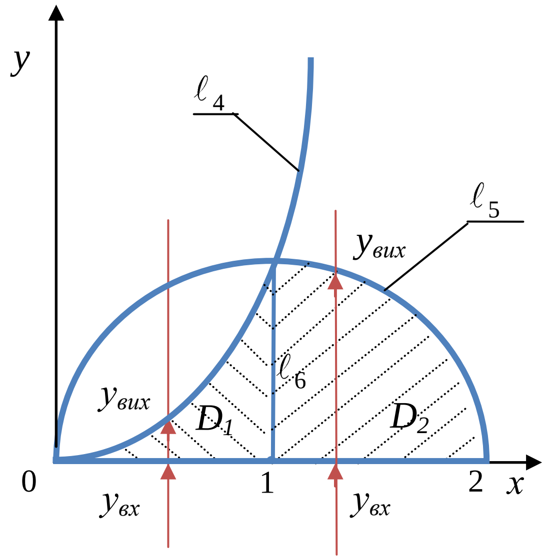


Рис. 2

Використовуючи формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного по області D, отримаємо

$$J=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)\,dx.$$

2-й спосіб. Проведемо інтегрування в напрямі осі Oy (рис. 2).

В цьому напрямі область $D=D_1\cup D_2$, $D_1\cap D_2=\varnothing$. Область D_1 обмежена лініями

$$\ell_3:\quad y_{вх}=0,\qquad \ell_4:\quad y_{вих}=x^2,\qquad \ell_6:\quad x=1,$$

отже,

$$D_1=\{(x,y):\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le x^2\}.$$

Область D_2 обмежена лініями

$$\ell_3:\quad y_{вх}=0,\qquad \ell_5:\quad y_{вих}=\sqrt{2x-x^2}\,,\qquad \ell_6:\quad x=1,$$

отже,

$$D_2=\{(x,y):\quad 1\le x\le 2,\quad 0\le y\le \sqrt{2x-x^2}\}.$$

Використовуючи властивість адитивності подвійного інтеграла та формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного по області $D = D_1 \cup D_2$, отримаємо

$$J = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\ dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\ dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,.$$

Відповідь:

$$J \overset{\text{В напрямі осі } Ox}{=} \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)\,dx \overset{\text{В напрямі осі } Oy}{=} \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,.$$

Приклад 2. Розставити межі інтегрування двома способами та обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)dxdy$, де область D обмежена лініями $x=1$, $y=-\sqrt[3]{x}$, $y=x^3$. Область інтегрування D зобразити на рисунку.

Розв'язок. Побудуємо область D (рис. 3, 4). Задані лінії

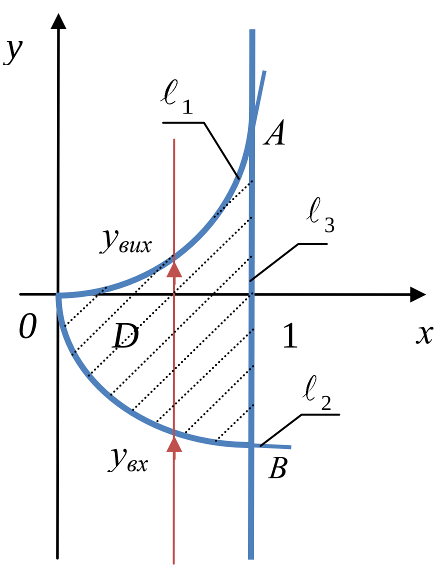


Рис. 3

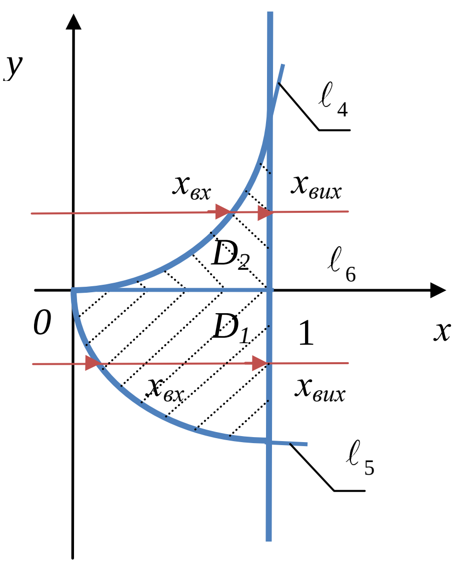


Рис. 4

перетинаються в трьох точках $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(1,-1)$. Область D правильна у напрямі осі Oy. В напрямі осі Ox її можна розбити на дві правильні області D_1 і D_2. Оскільки функція $f(x,y)=xy-9x^5y^5$ неперевна на всій площині Oxy і, зокрема в області D, то інтегрування можна проводити як у напрямі осі Ox, так і осі Oy.

1-й спосіб. Проведемо інтегрування в напрямі осі Oy. Область D (рис. 3) обмежена лініями

$$\ell_2: \quad y_{вх}=-\sqrt[3]{x}, \qquad \ell_1: \quad y_{вих}=x^3, \qquad \ell_3: \quad x=1,$$

отже,

$$D=\{(x,y): \quad 0\le x\le 1, \quad -\sqrt[3]{x}\le y\le x^3\}.$$

За формулою переходу від подвійного інтеграла до повторного

$$J=\iint\limits_D (9x^2y^2+25x^4y^4)\,dxdy=\int_0^1 dx\underbrace{\int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3}(9x^2y^2+25x^4y^4)\,dy}_{Внутрішній\ \ інтеграл}.$$

Обчислимо окремо внутрішній інтеграл

$$\int_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3}(9x^2y^2+25x^4y^4)\,dy=(3x^2y^3+5x^4y^5)\Big|_{-\sqrt[3]{x}}^{x^3}=3x^2x^9+5x^4x^{15}+3x^2x+5x^4x^{\frac{5}{3}}=$$

$$=3x^{11}+5x^{19}+3x^3+5x^{\frac{17}{3}}.$$

Тоді

$$J=\int_0^1(3x^{11}+5x^{19}+3x^3+5x^{\frac{17}{3}})\,dx=\left(\frac{3x^{12}}{12}+\frac{5x^{20}}{20}+\frac{3x^4}{4}+\frac{15x^{\frac{20}{3}}}{20}\right)\Big|_0^1=2.$$

2-й спосіб. Проведемо інтегрування в напрямі осі Ox. Оскільки нижня межа області D задана двома різними рівняннями, то дану область треба розбити на дві частини: $D=D_1\bigcup D_2$, $D_1\bigcap D_2=\varnothing$ (рис. 4). Область D_1 обмежена лініями

$$\ell_5: \quad x_{вх}=-y^3, \qquad \ell_3: \quad x_{вих}=1, \qquad \ell_6: \quad y=0,$$

тому

$$D_1=\{(x,y): \quad -1\le y\le 0, \quad -y^3\le x\le 1\}.$$

Область D_2 обмежена лініями

$$\ell_4: \quad x_{вх} = \sqrt[3]{y}, \qquad \ell_3: \quad x_{вих} = 1, \qquad \ell_6: \quad y = 0,$$

тому

$$D_2 = \{(x, y): \quad 0 \le y \le 1, \quad \sqrt[3]{y} \le x \le 1\}.$$

Використовуючи властивість адитивності подвійного інтеграла та формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного, отримаємо

$$J = \iint\limits_{D} (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\, dxdy = \iint\limits_{D_1} (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\, dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{D_2} (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\, dxdy = J_1 + J_2.$$

$$J_1 = \iint\limits_{D_1} (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\, dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y^3}^{1} (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (3x^3y^2 + 5x^5y^4)\Big|_{-y^3}^{1} dy = \int\limits_{-1}^{0} (3y^2 + 5y^4 + 3y^{11} + 5y^{19})\, dy =$$

$$= (y^3 + y^5 + \frac{y^{12}}{4} + \frac{y^{20}}{4})\Bigg|_{-1}^{0} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$J_2 = \iint\limits_{D_2} (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\, dxdy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{1} (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\, dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (3x^3y^2 + 5x^5y^4)\Big|_{\sqrt[3]{y}}^{1} dy = \int\limits_{0}^{1} (3y^2 + 5y^4 - 3y^3 - 5y^{\frac{17}{3}})\, dy =$$

$$= (y^3 + y^5 - \frac{3y^4}{4} - \frac{3y^{\frac{17}{3}}}{4})\Big|_{0}^{1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $$J = J_1 + J_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Відповідь: $J = 2$.

При обчисленні подвійного інтеграла важливо обирати той напрямок інтегрування, який дозволяє **спростити обчислення**.

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_{D} 8y^2 \sin 4xy\, dxdy$, де область D обмежена лініями $y = 4x$, $\quad y = \sqrt{2\pi}$, $\quad x = 0$.

Розв'язок. Побудуємо область D (рис. 5). Область D обмежена лініями $\ell_1: \ y=4x$, $\ell_2: \ y=\sqrt{2\pi}$, $\ell_3: \ x=0$.

Знайдемо точку перетину ліній ℓ_1 та ℓ_2:

$\begin{cases} y=4x, \\ y=\sqrt{2\pi}. \end{cases}$ Отже, криві перетинаються в точці $A\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \sqrt{2\pi}\right)$.

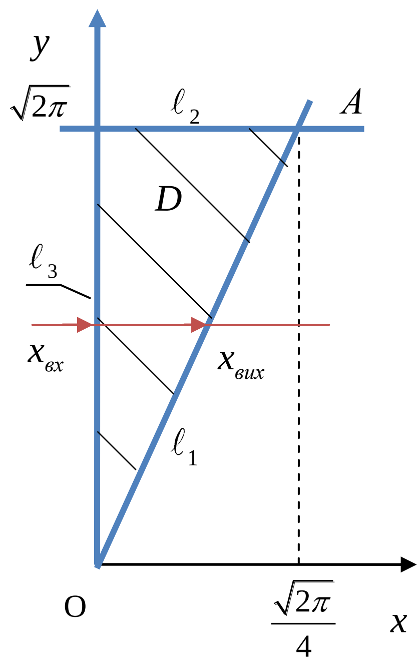


Рис. 5

Область D – правильна у напрямі осі Ox та Oy, тому інтегрування можна проводити як у напрямі осі Oy

$$D_{Oy} = \{(x,y): \ \ 0 \le x \le \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \ \ 4x \le y \le \sqrt{2\pi}\},$$

так і в напрямі осі Ox

$$D_{Ox} = \{(x,y): \ \ 0 \le y \le \sqrt{2\pi}, \ \ 0 \le x \le \frac{y}{4}\}.$$

Оскільки функція $f(x,y) = 8y^2 \sin 4xy$ – неперервна в області D, то використовуючи формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного, можна записати

$$J = \iint_D 8y^2 \sin 4xy \, dxdy = \underbrace{\int_0^{\frac{\sqrt{2\pi}}{4}} dx \int_{4x}^{\sqrt{2\pi}} 8y^2 \sin 4xy \, dy}_{J_{Oy}}.$$

$$J = \iint_D 8y^2 \sin 4xy \, dxdy = \underbrace{\int_0^{\sqrt{2\pi}} dy \int_0^{\frac{y}{4}} 8y^2 \sin 4xy \, dx}_{J_{Ox}}.$$

В даному випадку інтегрування доцільно проводити у напрямі осі Ox, оскільки обчислення інтеграла в напрямі осі Oy не приведе до бажаного результата (переконайтеся самостійно).

$$J_{Ox}=\int_0^{\sqrt{2\pi}}dy\int_0^{\frac{y}{4}}8y^2\sin 4xy\,dx=2\int_0^{\sqrt{2\pi}}ydy\int_0^{\frac{y}{4}}\sin 4xy\,d(4xy)=$$

$$=-2\int_0^{\sqrt{2\pi}}y\cos 4xy\Big|_0^{\frac{y}{4}}dy=-2\int_0^{\sqrt{2\pi}}y(\cos y^2-1)\,dy=$$

$$=-\int_0^{\sqrt{2\pi}}\cos y^2 d(y^2)+2\int_0^{\sqrt{2\pi}}y\,dy=-\sin y^2\Big|_0^{\sqrt{2\pi}}-y^2\Big|_0^{\sqrt{2\pi}}=-2\pi\,.$$

Відповідь: $J=-2\pi$.

Приклад 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D\frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, де область D обмежена лініями $y=x$, $y=x\,\mathrm{tg}\,x$, $x=\frac{\pi}{8}$.

Розв'язок. Побудуємо область D (рис. 6). Область D обмежена лініями

$$\ell_1:\ y=x,\qquad \ell_2:\ y=x\,\mathrm{tg}\,x,\qquad \ell_3:\ x=\frac{\pi}{8}.$$

Знайдемо точки перетину ліній ℓ_1 та ℓ_2

$$\begin{cases}y=x,\\ y=x\,\mathrm{tg}\,x,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x,\\ x(1-\mathrm{tg}\,x)=0.\end{cases}$$

Отже, криві перетинаються в двох точках $O(0,0)$, $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

В даному випадку інтегрування доцільно проводити у напрямі осі Oy, оскільки для інтегрування в напрямі осі Ox область D потрібно буде розбити на дві області. Область D – правильна у напрямі осі Oy, тому

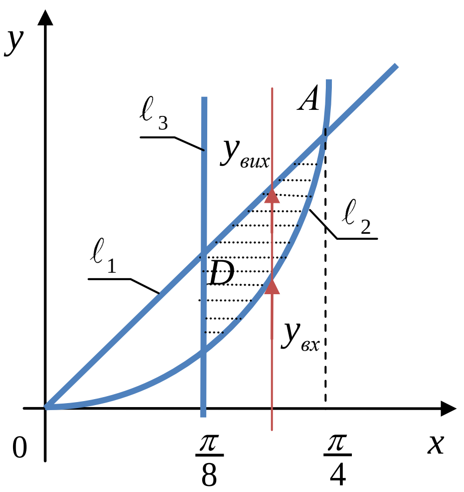


Рис. 6

$$D=\{(x,y):\ \frac{\pi}{8}\le x\le\frac{\pi}{4},\quad x\,\mathrm{tg}\,x\le y\le x\}.$$

Оскільки функція $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ – неперервна в області D, то використовуючи формулу переходу від подвійного інтеграла до повторного, можна записати

$$J=\iint_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} xdx\int_{x\,\mathrm{tg}\,x}^{x}\frac{dy}{x^2+y^2}=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\bigg|_{x\,\mathrm{tg}\,x}^{x}dx=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}(\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x))\,dx=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{\pi}{4}-x)\,dx=\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi^2}{128}=\frac{\pi^2}{128}.$$

Відповідь: $J=\dfrac{\pi^2}{128}$.

§2. Заміна змінної в подвійному інтегралі

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint_D (x+y)^2(x-y)^4\,dxdy$, де область D – квадрат $|x|+|y|\le 4$.

Розв'язок. Побудуємо область D (рис. 7), яка обмежена прямими:

$\ell_1:\ \ x+y=4$, $\ell_2:\ \ -x+y=4$, $\ell_3:\ \ -x-y=4$, $\ell_4:\ x-y=4$.

Перейдемо до нових змінних, а саме

$$\begin{cases} x+y=v, \\ x-y=u. \end{cases}$$

Тоді прямі $\ell_1:\ \ x+y=4$, $\ell_3:\ \ -x-y=4$ в системі Oxy перейдуть в прямі $\ell^*_1:\ \ v=4$, $\ell^*_3:\ \ v=-4$ в системі O_1uv.

Прямі $\ell_2: \ -x+y=4$, $\ell_4: \ x-y=4$ системі Oxy перейдуть в прямі $\ell^*_2: \ u=-4$, $\ell^*_4: \ u=4$ в системі O_1uv.

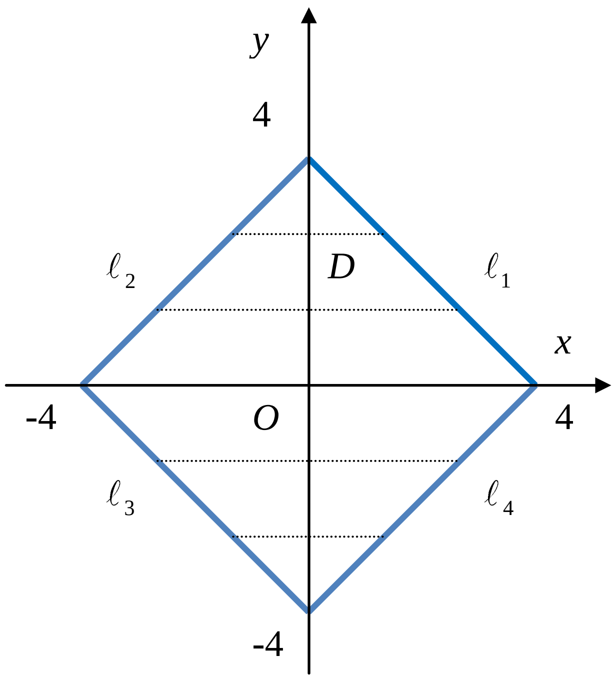


Рис. 7

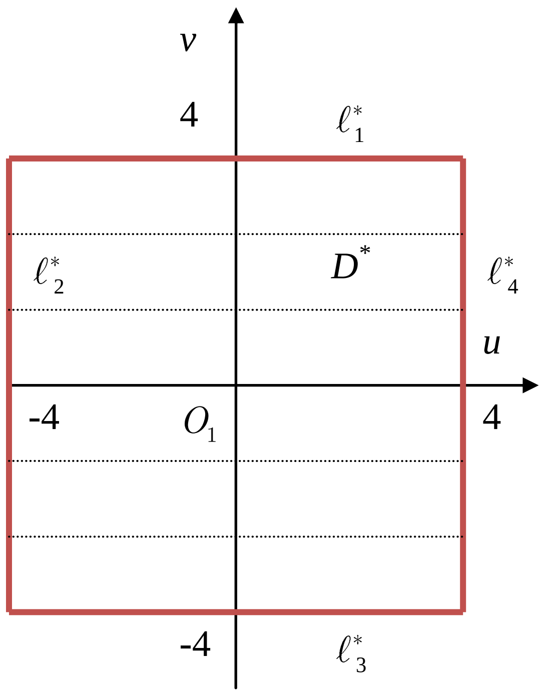


Рис. 8

Отже, область D переходить в область D^* в системі O_1uv (рис. 8)

$$D^* = \{(u,v): \quad -4 \le u \le 4, \quad -4 \le v \le 4\}.$$

Знайдемо формули переходу:

$$\begin{cases} x+y=v, \\ x-y=u \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(v+u), \\ y = \dfrac{1}{2}(v-u). \end{cases}$$

Обчислимо визначник Якобі

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Підінтегральна функція $f(x,y)=(x+y)^2(x-y)^4$ – неперервна в області D. Після заміни змінних вона прийме вигляд $f(u,v)=v^2u^4$. Використовуючи формулу заміни змінних в подвійному інтегралі

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv,$$

отримаємо

$$I=\iint_D (x+y)^2(x-y)^4\,dxdy=\iint_{D^*} v^2u^4\frac{1}{2}\,dudv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}v^2dv\int_{-4}^{4}u^4du=\frac{1}{2}\frac{v^3}{3}\bigg|_{-4}^{4}\frac{u^5}{5}\bigg|_{-4}^{4}=\frac{4^9}{30}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{4^9}{30}$.

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint_D x^2y\,dxdy$, де область D обмежена лініями $xy=4$, $xy=1$, $y=4x$, $y=\dfrac{x}{4}$.

Розв’язок. Побудуємо область D. Область D (рис. 9) обмежена лініями:

$\ell_1:\ y=4x$, $\ell_2:\ y=\dfrac{x}{4}$ – прямі, які проходять через початок координат;

$\ell_3:\ xy=1$, $\ell_4:\ xy=4$ – дві гіперболи.

Безпосереднє обчислення цього інтеграла надто громіздке, тому що як в напрямі осі Ox, так і в напрямі осі Oy область D треба спочатку розбити на три правильні області, а потім обчислити три подвійних інтеграла. Тому доцільно перейти до нових змінних, а саме ввести криволінійні координати $\begin{cases} xy=v, \\ \dfrac{y}{x}=u. \end{cases}$

Тоді прямі $\ell_1:\ y=4x$, $\ell_2:\ y=\dfrac{x}{4}$ в системі Oxy перейдуть в прямі $\ell^*_1:\ u=4$, $\ell^*_2:\ u=\dfrac{1}{4}$ в системі O_1uv.

Гіперболи $\ell_3:\ xy=1$, $\ell_4:\ xy=4$ системі Oxy перейдуть в прямі $\ell^*_3:\ v=1$, $\ell^*_4:\ v=4$ в системі O_1uv.

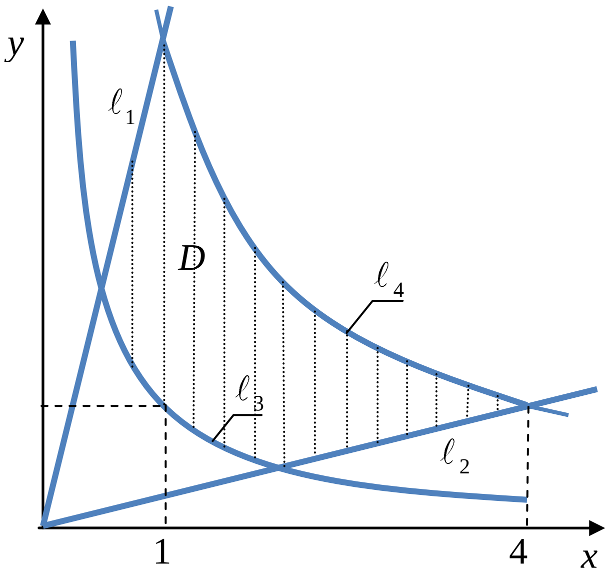


Рис. 9

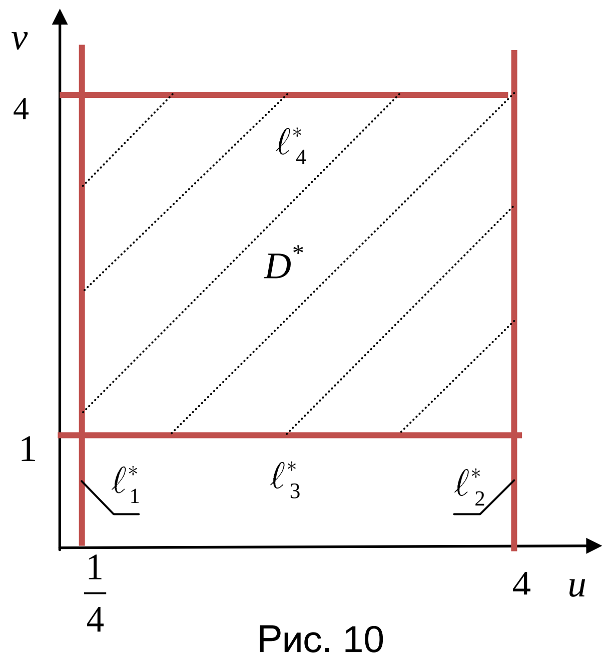


Рис. 10

Отже, криволінійна область D переходить в прямокутну область D^* в системі O_1uv (рис. 10)

$$D^*=\{(u,v):\ \frac{1}{4}\le u\le 4,\quad 1\le v\le 4\}.$$

Знайдемо формули переходу. Для цього перемножимо рівності:

$$\begin{cases} xy=v, \\ y=ux \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy^2=vux, \\ y=ux \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=vu \quad (x\ne 0), \\ x=\dfrac{y}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{vu}, \\ x=\sqrt{\dfrac{v}{u}}. \end{cases}$$

Отже, формули переходу:

$$\begin{cases} x=u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}, \\ y=u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Обчислимо визначник Якобі

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\\ \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}}\cdot u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\cdot u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}(u^{-1}+u^{-1})=-\frac{1}{2u}\quad\Rightarrow$$

$$|J(u,v)|=\frac{1}{2u}.$$

Підінтегральна функція $f(x,y)=x^2y$ – неперервна в області D.

Після заміни змінних вона прийме вигляд $f(u,v)=u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}$.
Використовуючи формулу заміни змінних в подвійному інтегралі

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv,$$

отримаємо

$$I=\iint\limits_D x^2y\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D^*}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}\cdot u^{-1}\,dudv=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{4}u^{-\frac{3}{2}}\,du\int\limits_{1}^{4}v^{\frac{3}{2}}\,dv=$$

$$=-u^{-\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{4}}^{4}\cdot\frac{2}{5}v^{\frac{5}{2}}\Big|_{1}^{4}=-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}-2\right)(32-1)=\frac{93}{5}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{93}{5}$.

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_D dxdy$, де область D обмежена лінією $(x+y)^4=xy^2$.

Розв'язок. Оскільки в рівнянні кривої ℓ: $(x+y)^4=xy^2$ ліва частина невід'ємна, то $xy^2\ge 0\ \Rightarrow\ x\ge 0$. Отже, крива розташована в правій півплощині.

Введемо криволінійні координати за допомогою заміни

$$\begin{cases} x = \rho\cos^2\varphi, \\ y = \rho\sin^2\varphi. \end{cases}$$

Тоді рівняння кривої прийме вигляд

$$\ell: \quad (\rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi)^4 = \rho\cos^2\varphi\cdot(\rho\sin^2\varphi)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\ell: \quad \rho = \cos^2\varphi\sin^4\varphi\,.$$

Область інтегрування буде мати такий вигляд

$$D^* = \left\{(\rho,\varphi): \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le \cos^2\varphi\sin^4\varphi\right\}.$$

Обчислимо визначник Якобі

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\varphi & -2\rho\cos\varphi\sin\varphi \\ \sin^2\varphi & 2\rho\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= 2\rho\sin\varphi\cos^3\varphi + 2\rho\cos\varphi\sin^3\varphi = 2\rho\cos\varphi\sin\varphi\,.$$

Обчислимо інтеграл

$$I = \iint_D dxdy = \iint_{D^*} |J(\rho,\varphi)|\, d\rho d\varphi = \iint_{D^*} \rho\cos\varphi|\,\sin\varphi|\, d\rho d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\cos^2\varphi\sin^4\varphi} \rho\, d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\cos^2\varphi\sin^4\varphi} d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\sin^9\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\sin^9\varphi\, d(\sin\varphi) =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)^2\sin^9\varphi\, d(\sin\varphi) = \left| \begin{array}{l} t = \sin\varphi, \\ \begin{array}{c|c|c} \varphi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| = 2\int_0^1 (1-t^2)^2 t^9 dt =$$

$$= 2\int_0^1 (t^9 - 2t^{11} + t^{13})dt = 2\left(\frac{t^{10}}{10} - 2\frac{t^{12}}{12} + \frac{t^{14}}{14}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{1}{105}\,.$$

Відповідь: $I = \dfrac{1}{105}$.

§3.Обчислення подвійного інтеграла в ПСК і УПСК. Застосування подвійного інтеграла

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$. Область D — кільце між колами радіусів $R_1=1$ та $R_2=\mathrm{e}$ з центром у початку координат.

Розв'язок. Область D (рис. 11) обмежена двома колами

$$\ell_1:\quad x^2+y^2=1,\qquad \ell_2:\quad x^2+y^2=\mathrm{e}^2.$$

Перейдемо до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases}$$

$$x^2+y^2=\rho^2,$$
$$dxdy=\rho d\rho d\varphi.$$

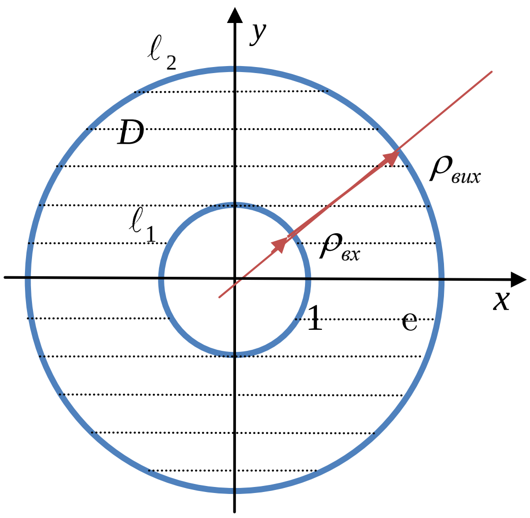


Рис. 11

В полярній системі координат рівняння заданих ліній приймуть вигляд

$$\ell_1:\quad \rho_{вх}=1,\qquad \ell_2:\quad \rho_{вих}=\mathrm{e},$$

кут φ змінюється від 0 до 2π.

Скористаємося формулою обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi,$$

де D^* – область, відповідна області D в системі $O\varphi\rho$:

$$D^*=\{(\rho,\varphi):\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 1\le\rho\le \mathrm{e}\}.$$

Тоді

$$J=\iint\limits_{D}\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D^*}\frac{\ln\rho^2}{\rho^2}\cdot\rho d\rho d\varphi=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^{e}\frac{\ln\rho}{\rho}d\rho=$$

$$=2\cdot 2\pi\int\limits_1^{e}\ln\rho\,d(\ln\rho)=4\pi\left.\frac{(\ln\rho)^2}{2}\right|_1^{e}=2\pi(\ln^2 e-\ln^2 1)=2\pi\,.$$

Відповідь: $J=2\pi$.

Приклад 2. Знайти площу фігури обмеженої лініями

$$y^2-2y+x^2=0,\qquad y^2-10y+x^2=0,\qquad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\qquad y=\sqrt{3}x.$$

Розв'язок. Визначимо вигляд ліній, якими обмежена область D:

$\ell_1:\ \ y^2-2y+x^2=0 \ \Rightarrow\ x^2+(y^2-2y+1)=1 \ \Rightarrow\ x^2+(y-1)^2=1$ – коло з центром в точці $O_1(0,1)$ і радіусом $R_1=1$;

$\ell_2:\ \ y^2-10y+x^2=0 \ \Rightarrow\ x^2+(y^2-10y+25)=25 \ \Rightarrow\ x^2+(y-5)^2=25$ – коло з центром в точці $O_2(0,5)$ і радіусом $R_2=5$;

$\ell_3:\ \ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\quad \ell_4:\ \ y=\sqrt{3}x$ – дві прямі, які проходять через початок координат. Побудуємо область D (рис. 12).

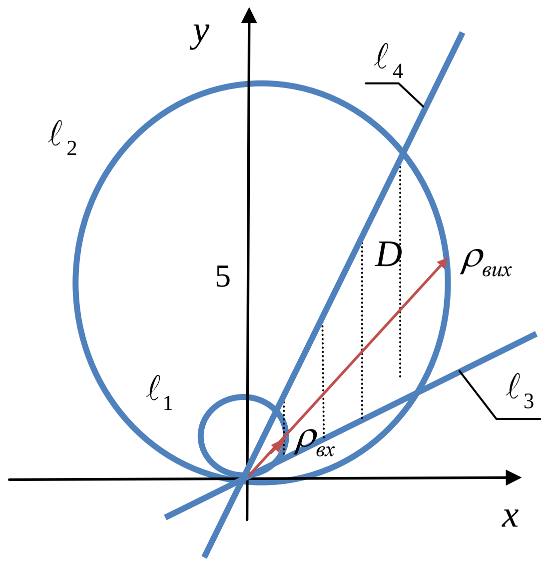


Рис. 12

Перейдемо до полярної системи координат

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, & x^2+y^2=\rho^2,\\ y=\rho\sin\varphi, & dxdy=\rho d\rho d\varphi.\end{cases}$$

В полярній системі координат рівняння заданих ліній та область D приймуть вигляд:

$\ell_1:\ \ y^2-2y+x^2=0 \ \Rightarrow\ \rho^2-2\rho\sin\varphi=0 \ \Rightarrow\ \rho=2\sin\varphi;$

$\ell_2:\ \ y^2-10y+x^2=0 \ \Rightarrow\ \rho^2-10\rho\sin\varphi=0 \Rightarrow\ \rho=10\sin\varphi;$

$$\ell_3:\ \ y=\frac{x}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow\ \rho\sin\varphi=\frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3} \ \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{6};$$

$$\ell_4:\ \ y=\sqrt{3}x \ \Rightarrow\ \rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3} \ \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{3}.$$

$$D^*=\left\{(\rho,\varphi):\ \ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\ \ 2\sin\varphi\le\rho\le10\sin\varphi\right\}.$$

Площу області D обчислюємо за формулою

$$S_D=\iint\limits_D dxdy \overset{ПСК}{=} \iint\limits_{D^*}\rho\, d\rho d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{2\sin\varphi}^{10\sin\varphi}\rho\, d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{2\sin\varphi}^{10\sin\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(100\sin^2\varphi-4\sin^2\varphi)\,d\varphi=48\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi\,d\varphi=24\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=24(\varphi-\frac{1}{2}\sin2\varphi)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=24(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3})=4\pi\ (\text{од}^2).$$

Відповідь: $S_D=4\pi$ (од^2).

Приклад 3. Знайти масу, статичний момент відносно осі Ox, момент інерції відносно осі Ox пластини D, обмеженої лініями $1\le\frac{x^2}{16}+y^2\le3,\quad x\ge0,\quad y\ge\frac{x}{4}$, якщо густина пластини в кожній точці визначається функцією $\mu(x,y)=\frac{x}{y^5}$.

Розв'язок. Область D (рис. 13) обмежена лініями:

$\ell_1:\ \ \frac{x^2}{16}+y^2=1$ – еліпс з півосями $a=4,\quad b=1;$

$\ell_2:\ \ \frac{x^2}{16}+y^2=3$ – еліпс з півосями $a=4\sqrt{3},\quad b=\sqrt{3};$

$\ell_3:\ \ x=0,\quad \ell_4:\ \ y=\frac{x}{4}$ – відповідно вісь Oy та пряма, яка проходить через початок координат.

Перейдемо до **узагальненої полярної системи координат:**

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi = 4\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

В узагальненій полярній системі координат рівняння ліній матимуть вигляд:

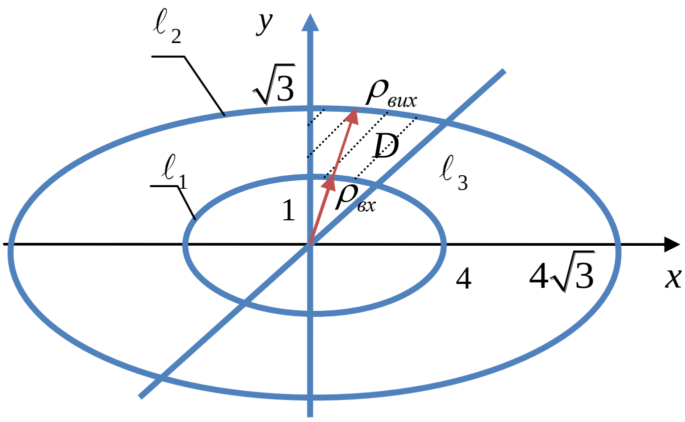


Рис. 13

$$\ell_1:\ \frac{16\rho^2\cos^2\varphi}{16} + \rho^2\sin^2\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = 1;$$

$$\ell_2:\ \frac{16\rho^2\cos^2\varphi}{16} + \rho^2\sin^2\varphi = 3 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{3};$$

$$\ell_3:\ y = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad \rho\sin\varphi = \frac{4\rho\cos\varphi}{4} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$\ell_4:\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\rho\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Область інтегрування D^* буде мати такий вигляд

$$D^* = \left\{(\rho,\varphi):\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \ 1 \le \rho \le \sqrt{3}\right\}.$$

1. Масу неоднорідної пластини, яка займає область D будемо обчислювати за формулою

$$m_D = \iint_D \mu(x,y)dxdy = \iint_D \mu(a\rho\cos\varphi, a\rho\sin\varphi)\left|J(\rho,\varphi)\right| d\rho d\varphi .$$

Обчислимо визначник Якобі

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= ab\rho\cos^2\varphi + ab\rho\sin^2\varphi = ab\rho = 4\rho .$$

Підінтегральна функція $\mu(x,y)=\dfrac{x}{y^5}$ після заміни змінних матиме вигляд $\mu(\rho,\varphi)=\dfrac{4\rho\cos\varphi}{\rho^5\sin^5\varphi}$. Отже, маса пластини D

$$m_D=\iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D^*}\frac{4\rho\cos\varphi}{\rho^5\sin^5\varphi}\cdot 4\rho\,d\rho d\varphi=$$

$$=16\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin\varphi)}{\sin^5\varphi}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{d\rho}{\rho^3}=\frac{4}{\sin^4\varphi}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2\rho^2}\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=2(1-4)\left(\frac{1}{3}-1\right)=4\,(\text{од. маси}).$$

2. Статичний момент неоднорідної матеріальної пластини відносно осі Ox будемо обчислювати за формулою

$$M_{Ox}=\iint\limits_D y\cdot\mu(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D y\cdot\frac{x}{y^5}dxdy\overset{ПСК}{=}\iint\limits_{D^*}\frac{4\rho\cos\varphi}{\rho^4\sin^4\varphi}\cdot 4\rho\,d\rho d\varphi=$$

$$=16\iint\limits_{D^*}\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi}\cdot\frac{1}{\rho^2}\,d\rho d\varphi=16\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin\varphi)}{\sin^4\varphi}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{d\rho}{\rho^2}=\frac{16}{3\sin^3\varphi}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\rho}\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{16}{3\sqrt{3}}(1-2\sqrt{2})(1-\sqrt{3}).$$

3. Момент інерції матеріальної пластини відносно Ox будемо обчислювати за формулою

$$I_{Ox}=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D y^2\cdot\frac{x}{y^5}dxdy\overset{ПСК}{=}\iint\limits_{D^*}\frac{4\rho\cos\varphi}{\rho^3\sin^3\varphi}\cdot 4\rho\,d\rho d\varphi=$$

$$=16\iint\limits_{D^*}\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\cdot\frac{1}{\rho}\,d\rho d\varphi=16\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin\varphi)}{\sin^3\varphi}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{8}{\sin^2\varphi}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\ln|\rho|\Big|_1^{\sqrt{3}}=4\ln 3.$$

Відповідь: 1. $m_D=4\,$(од. маси); 2. $M_{Ox}==\dfrac{16}{3\sqrt{3}}(1-2\sqrt{2})(1-\sqrt{3})$;

3. $I_{Ox}=4\ln 3$.

Приклад 4. Обчислити площу поверхні частини параболоїда $x=y^2+z^2$, яка вирізається циліндром $y^2+z^2=R^2$.

Розв'язок. Зобразимо поверхні S_1 та S_2 (рис. 14).

$S_1: \quad x = y^2 + z^2$ — параболоїд обертання з віссю симетрії Ox та вершиною в точці $O(0,0,0)$;

$S_2: \quad y^2 + z^2 = R^2$ — коловий циліндр, напрямною якого є коло $\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2, \\ x = 0 \end{cases}$ в площині yOz, а твірні паралельні осі Ox.

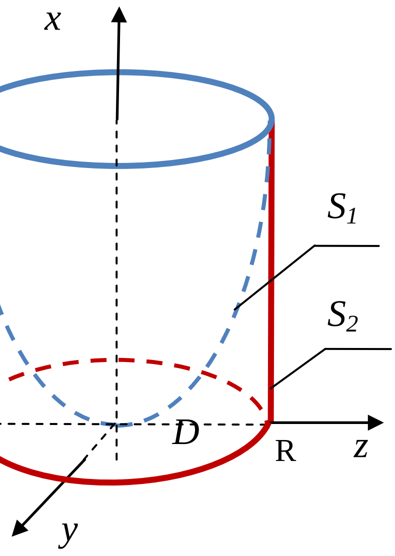


Рис. 14

Площу частини поверхні $S_1: \quad x = x(y,z) = y^2 + z^2$, яка проектується на площину Oyz в область D обчислюємо за формулою

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(x'_y(y,z)\right)^2 + \left(x'_z(y,z)\right)^2}\, dydz$$

.

Враховуючи симетрію поверхні відносно осі Ox та те, що $\dfrac{\partial x(y,z)}{\partial y} = 2y, \quad \dfrac{\partial x(y,z)}{\partial z} = 2z,$ можна записати

$$P = 4 \cdot \iint\limits_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}\, dydz ,$$

де область $\quad D = \{(y,z): \quad y^2 + z^2 \le R^2, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0\}.$

Перейдемо до полярної системи координат

$$\begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{matrix} y^2 + z^2 = \rho^2, \\ dydz = \rho d\rho d\varphi. \end{matrix}$$

Опишемо область D в полярній системі координат

$$D^* = \{(\rho,\varphi): \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le R\}.$$

Використовуючи формулу обчислення площі поверхні та формулу обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат, отримаємо:

$$P = 4 \cdot \iint\limits_{D} \sqrt{1+4y^2+4z^2}\, dydz \overset{ПСК}{=} 4\iint\limits_{D^*} \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{1+4\rho^2}\, d(1+4\rho^2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}[(1+4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1] \cdot \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}[(1+4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1]\,(\text{од}^2).$$

Відповідь: $P = \frac{\pi}{6}[(1+4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$ (од^2).

Приклад 5. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=a^2$, $x+y+z=2a$ $(a>0)$, $z=0$.

Розв'язок. Побудуємо тіло G, яке обмежене поверхнями S_1, S_2 та S_3 (рис. 15).

$S_1:$ $x^2+y^2=a^2$ — коловий циліндр, напрямною якого є коло $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=0 \end{cases}$ в площині Oxy, а твірні паралельні осі Oz;

$S_2:$ $x+y+z=2a$ $(a>0)$ — похила площина, яка відтинає від координатних осей відрізки довжиною $2a$;

$S_3:$ $z=0$ — координатна площина Oxy.

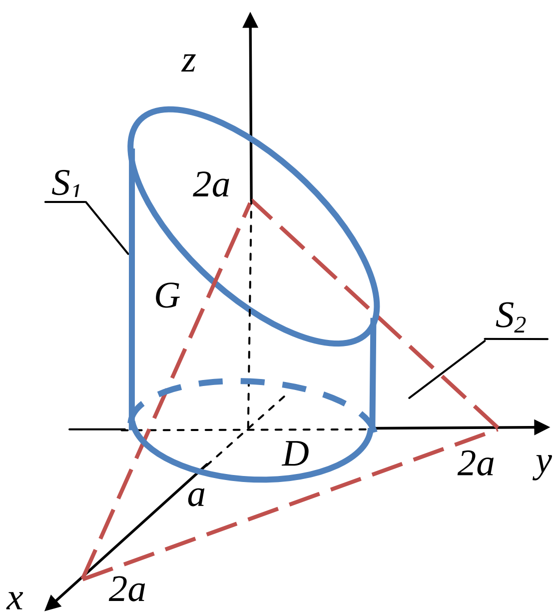


Рис. 15

Об'єм циліндричного тіла будемо обчислювати за формулою

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \left| z = f(x,y) = 2a - x - y \right| = \iint_D (2a - x - y)\,dxdy.$$

Оскільки, проекцією тіла на площину Oxy є коло радіуса $R = a$, перейдемо до полярної системи координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & x^2 + y^2 = \rho^2, \\ y = \rho\sin\varphi, & dxdy = \rho d\rho d\varphi. \end{cases}$$

Опишемо область D в полярній системі координат

$$D^* = \{(\rho, \varphi):\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le a\}.$$

Тоді, за формулою обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат, отримаємо:

$$V = \iint_{D^*} (2a - \rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (2a\rho - \rho^2\cos\varphi - \rho^2\sin\varphi)\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi - \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^a d\varphi = a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\right) d\varphi =$$

$$= a^3\left(\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi a^3 \text{ (од}^3\text{)}.$$

Відповідь: $V = 2\pi a^3$ (од^3).

Приклад 6. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} = 1$, $z = 0$, $y = x^2$.

Розв'язок. Побудуємо тіло G, яке обмежене поверхнями S_1, S_2 та S_3 (рис. 16) та його проекцію на площину Oxy.

S_1: $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} = 1$ — похила площина, яка відтинає від координатних осей Ox, Oy, Oz відрізки довжиною 4, 8, 5 відповідно;

S_2: $y = x^2$ — параболічний циліндр, напрямною якого є парабола $\begin{cases} y = x^2, \\ z = 0 \end{cases}$ в площині Oxy, а твірні паралельні осі Oz;

S_3: $z = 0$ — координатна площина Oxy.

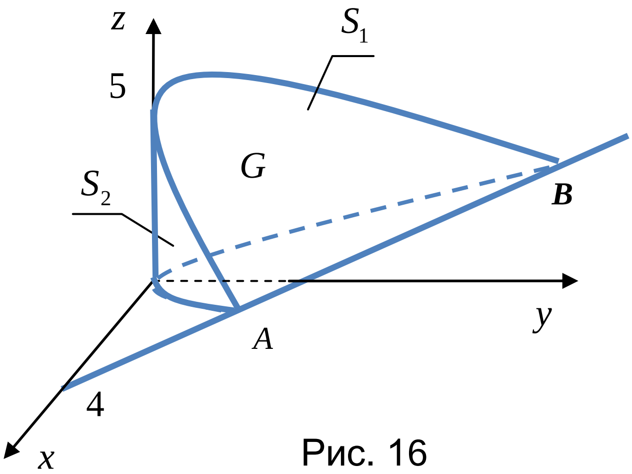


Рис. 16

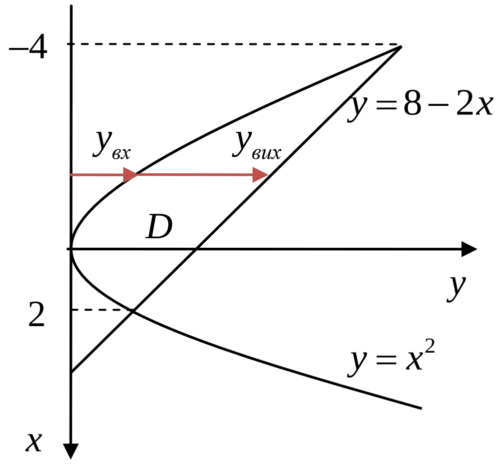


Рис. 17

Опишемо область D, для цього знайдемо координати точок A і B:

$$\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1, \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-8=0, \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+4)=0, \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A(2,4), \\ B(-4,16). \end{matrix}$$

Проекція тіла G на площину Oxy – область D (рис. 17) є правильною в напрямі осі Oy і має такий вигляд

$$D=\{(x,y):\ \ -4\le x\le 2,\quad x^2\le y\le 8-2x\}.$$

Об'єм циліндричного тіла G будемо обчислювати за формулою

$$V=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\left| z=f(x,y)=\frac{5}{8}(8-2x-y)\right|=\frac{5}{8}\iint_D(8-2x-y)\,dxdy=$$

$$=\frac{5}{8}\int_{-4}^{2}dx\int_{x^2}^{8-2x}(8-2x-y)\,dy=\frac{5}{8}\int_{-4}^{2}\left((8-2x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{8-2x}dx=$$

$$=\frac{5}{8}\int_{-4}^{2}\left(2(4-x)^2-(8-2x)x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\frac{5}{8}\int_{-4}^{2}\left(32-16x-6x^2+2x^3+\frac{x^4}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{5}{8}\left(32x-8x^2+2x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-4}^{2}=411\,(\text{од}^3).$$

Відповідь: $V=411$ (од^3).

Приклад 7. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=3x^2+2y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=3$.

Розв'язок. Побудуємо тіло G (рис. 18), яке обмежене поверхнями:

$S_1:\ z=3x^2+2y^2$ — еліптичний параболоїд з вершиною в точці $O(0,0,0)$;

$S_2:\ x=2$ – площина, перпедикулярна до осі Ox;

$S_3:\ y=3$ – площина, перпедикулярна до осі Oy;

$x=0,\ y=0,\ z=0$ - координатні площини Oyz, Oxz, Oxy відповідно.

Опишемо область D – проекцію тіла G на площину Oxy:

$$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 3\}.$$

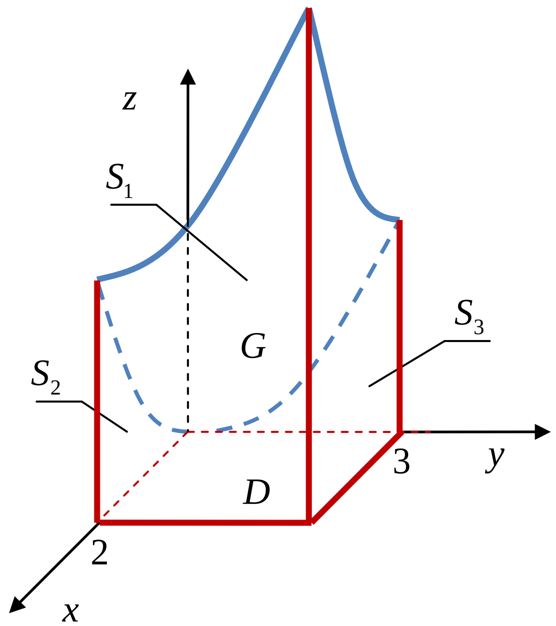


Рис. 18

Об'єм тіла G будемо обчислювати за формулою

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\ dxdy=\left|\ z=f(x,y)=3x^2+2y^2\ \right|=$$

$$=\iint\limits_D (3x^2+2y^2)\ dxdy=\int_0^2 dx\int_0^3 (3x^2+2y^2)\ dy=\int_0^2 (3x^2y+2\frac{y^3}{3})\Big|_0^3 dx=$$

$$=\int_0^2 (9x^2+18)\ dx=\left(3x^3+18x\right)\Big|_0^2=60\ \text{(од}^3\text{)}.$$

Відповідь: $V=60$ (од^3).

Зауваження. Для студентів, які прагнуть якісно засвоїти цю тему вищої математики, бажають набути вмінь та навичок, можемо порекомендувати наступну літературу [2], [4].

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст]: учебник для вузов / Яков Степанович Бугров, Сергей Михайлович Никольский; [предисл. авторов]. – 3-е изд., испр. – М.: Наука; Главная редакция физико-матем. литературы, 1989. – 464 с.: ил.; 21 см. – Предм. указ.: с. 461–464 . – 126000 экз. – ISBN 5–02–013925–4
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учебное пособие для вузов в 2-х ч. Ч. II / Павел Ефимович Данко, Александр Георгиевич Попов, Татьяна Яковлевна Кожевникова. – Изд. 5-е, исп. – М.: Высш. шк., 1996. – 416 с.: ил.; 21 см. – Библиогр.: с. 416 . – 10000 экз. – ISBN 5–06–003071–7 (ч. II). – ISBN 5–06–003072.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов [Текст]: учебник для вузов /. Том I - II. – М. Наука, 1972, 1978.
4. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. [Текст]: учебник для вузов / Ч. 1-5. – Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967–1972.
5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: Тридцать пять лекций. 2 часть / Дмитрий Письменный; [вступ. ст. автора] – М.: Рольф, 2002. – 256 с.: ил; 21 см. – 10000 экз. – ISBN 5–7836–0312–0.

ЗМІСТ